République Tunisienne
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université de Gafsa, Université de Gabès,
Université de Jendouba, Université de Kairouan,
Université de Tunis, Université de Monastir

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة قفصة، جامعة قابس، جامعة جندوبة،
جامعة القيروان، جامعة تونس، جامعة المنستير

Université Gafsa A.U 2019/2020

Correction examen mathématiques

Exercice 1 (5pts) :

1) a) $\left(2\,e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 = 4\,e^{i\frac{2\pi}{3}} = 4\left(cos\frac{2\pi}{3} + i\ sin\frac{2\pi}{3}\right) = 4\left(\frac{-1}{2} + i\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$= -2 + 2\,i\sqrt{3}.$

b) $\Delta = (b^2 - 4ac) = 4 - 4\left(\frac{3}{2} - i\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 + 2i\sqrt{3} = \left(2\,e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$ une racine rarré de Δ et donc $\delta = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$Z' = \frac{2+2\,e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$, $Z'' = 1 - e^{i\frac{\pi}{3}}$.

c) Passons au conjugué dans $()G$:
$\bar{Z}^2 - 2\bar{Z} + \frac{3}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$, donc $\bar{Z}$ est une solution de (E).

$\Rightarrow\ \bar{Z} = Z' = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\bar{Z} = Z'' = 1 - e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\Rightarrow\ Z = 1 + e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ou $Z = 1 - e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

2) a) $\left(Z_1.Z_2 = \frac{c}{a}\right)$
On a $Z_1.Z_2 = -2\,i\,sin\theta\ e^{i\theta}$

$$arg\ Z_1 + arg\ Z_2 \begin{cases} = arg(Z_1.Z_2) \\ = arg(-2\,i\,sin\theta) + arg(e^{i\theta}) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \equiv \frac{-\pi}{2} + \theta\ [2\pi].(\text{car } arg(-i) \equiv \frac{-\pi}{2}\ [2\pi] \text{ et } sin\theta > 0 \end{cases}$$

b) $\Delta = 4 + 4 \times 2\,i\,sin\theta\ e^{i\theta} = 4\big(1 + 2\,i\,sin\theta(cos\theta + i\,sin\theta)\big)$

$= 4\big(1 + 2\,i\,sin\theta cos\theta - 2\,sin^2\theta)\big) = 4(cos2\theta + i\,sin2\theta)$

$= 4e^{2i\theta} = (2e^{i\theta})^2.$

Donc $Z_1 = \frac{2+2e^{i\theta}}{2} = 1 + e^{i\theta}$ et $Z_2 = 1 - e^{i\theta}$

3) a) $Z_N = 1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\,e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$

$= 2\,e^{i\frac{\theta}{2}}\,cos(\frac{\theta}{2})$, (car $Z + \bar{Z} = 2Re(Z)$).

b) On a $\theta \in]0, \pi[$, donc $\frac{\theta}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} > 0$

$\Rightarrow Z_N = 2\, e^{i\frac{\theta}{2}} \cos(\frac{\theta}{2})$, c'est l'écriture exponentielle.

$* \; Z_M = 1 + e^{i(\theta+\pi)} = 2\, e^{i(\frac{\theta+\pi}{2})} \cos(\frac{\theta+\pi}{2}) = 2\, e^{i(\frac{\theta+\pi}{2})} \cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2})$

$= -2\sin(\frac{\theta}{2})\, e^{i(\frac{\theta+\pi}{2})} = 2\sin(\frac{\theta}{2})\, e^{i(\frac{\theta+\pi}{2}+\pi)} = 2\sin(\frac{\theta}{2})\, e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2})}$.

$(\sin(\frac{\theta}{2}) > 0$ car $\frac{\theta}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[\,)$

4) a) On a $Z_M = 1 - e^{i\theta} \Rightarrow \mid Z_M - 1 \mid = \mid e^{i\theta} \mid = 1$.

Donc $M \in \mathcal{C}(I, 1)$ avec $Z_I = 1$.

b) On a $aff\,\overrightarrow{OM} = 1 - e^{i\theta}$ et $aff\,\overrightarrow{NA} = Z_A - Z_N = 1 - e^{i\theta}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NA}$

$\Rightarrow OMAN$ est un parallélogramme,

de plus $\frac{aff\,\overrightarrow{OM}}{aff\,\overrightarrow{ON}} = \frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}} = \frac{(1-e^{i\theta})(1+e^{-i\theta})}{(1+e^{i\theta})(1+e^{-i\theta})} = \frac{-e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{|1+e^{i\theta}|^2} = \frac{-2i\sin\theta}{|1+e^{i\theta}|^2} \in i\mathbb{R}$.

Donc $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{ON}$.

Donc un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle.

Exercice 2 (6pts):

1) a) g est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme étant somme de 2 fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

b) g admet en 1 un minimum global, donc $g(x) \geq g(1) > 0$.

2) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} x(2 - \frac{(\ln x)^2}{x}) = \lim\limits_{+\infty} x(2 - (\frac{\ln x}{\sqrt{x}})^2)$.

On a $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ alors $\lim\limits_{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 2 \lim\limits_{+\infty} \frac{\ln X}{X}$, $(X = \sqrt{x})$.

$\lim\limits_{0^+} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{0^+} lnx = -\infty$

donc $\lim\limits_{0^+} -(lnx)^2 = -\infty$.

b) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme étant somme de 2 fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$

et $f'(x) = 2 - 2\frac{1}{x}lnx = 2(\frac{x-lnx}{x}) = \frac{2g(x)}{x} > 0$.

c)

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

3) a) La tangente est d'équation $y = f'(x)(x-1) + f(1) = 2(x-1) + 2$ alors $y = 2x$.

b) $\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} (2 - \frac{(lnx)^2}{x}) = 2$

$\lim\limits_{+\infty} (f(x) - 2x) = \lim\limits_{+\infty} (-(lnx)^2) = -\infty$.

c) $f(x) - y = -(lnx)^2 < 0$, donc (C_f) est au dessous de Δ.

4) a) f est une bijection de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$, $0 \in \mathbb{R}$ donc admet un unique antécédent $\alpha \in]0, +\infty[$. On a $f(\alpha) = 0$ ou encore α est solution de $f(x) = 0$, on a $f(\frac{1}{4})f(\frac{1}{2}) < 0$ donc $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$.

b)